Chapitre 6

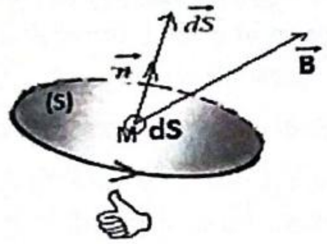
Loi fondamentales de la magnétostatique

I. Flux du champ magnétique

Soit (S) une surface quelconque orienté, le flux du champ magnétique $\vec{B}$ à travers la surface (S) est défini par :

$$\phi_{(S)} = \iint \vec{B}d\vec{S} = \iint \vec{B}\vec{n}dS$$

Avec $\vec{n}$ vecteur unitaire de la normale à l'élément de surface dS.



$d\vec{B} = m\,d\ell\,\vec{B}$

L'unité du flux de $\vec{B}$ est le weber (Wb)

Remarque

Le flux représente la quantité des lignes de champ passant à travers la surface S.

Application :

Calculer le flux du champ magnétique créé par un fil conducteur rectiligne infini parcouru par un courant I à travers un cadre rectangulaire de côté a et b situé dans le même plan que le fil à une distance r de celui-ci.

II. Propriété fondamentale du flux magnétique

II.1. Forme locale (ou différentielle) de la conservation du flux magnétique.

Considérons une surface fermée (S) quelconque délimitant un volume (V) ou existe un champ magnétique $\vec{B}$, On se propose de calculer la divergence du champ magnétique à partir de l'expression généralisée de loi de Biot et Savart :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{J} \wedge \vec{r}}{r^3}dV$$

On se place toujours dans le cas où la densité de courant $\vec{J}$ est uniforme et indépendante du temps ($\vec{J}$ est indépendant de $\vec{r}$((c-à-d x, y, z) et de t). Alors:

$$div\vec{B}(M) = div(\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{J} \wedge \vec{r}}{r^3}dV) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V div(\frac{\vec{J} \wedge \vec{r}}{r^3})dV$$

Notons que l'opérateur "div" s'applique à $\vec{r}$ et non pas à $\vec{J}$ (car $\vec{J}$ est indépendant de $\vec{r}$ donc de (x, y, z)). Or d'après la relation:

$$div(\vec{u} \wedge \vec{u'}) = -\vec{u}.\vec{rot}\vec{u'} + \vec{u'}\vec{rot}\vec{u}.$$

$$div\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V [-\vec{J}\,\overrightarrow{rot}(\frac{\vec{r}}{r^3}) + \frac{\vec{r}}{r^3}\overrightarrow{rot}(\vec{J})]dV$$

D'autre part, on a : $\frac{\vec{r}}{r^3} = -\overrightarrow{grad}(\frac{1}{r}) \Longrightarrow \overrightarrow{rot}(\frac{\vec{r}}{r^3}) = -\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}(\frac{1}{r})) = 0$. D'où

$\boxed{div\vec{B}(M) = 0} \Longrightarrow$ **Forme locale de la conservation du flux magnétique.**

II.2. Forme intégrale de la conservation du flux magnétique

Soit une surface fermée (S) quelconque délimitant un volume (V) ou existe un champ magnétique $\vec{B}$, le théorème de Green-Ostrogorski (divergence), permet d'écrire :

$$\oiint_S \vec{B}(M')\vec{n}dS = \iiint_V div\vec{B}(M).d\tau$$

Avec $d\tau$ élément de volume de V centré en M et dS élément de surface centré en M'

Or : $div\vec{B}(M) = 0$ Alors :

$\boxed{\oiint_S \vec{B}.\vec{n}dS = 0} \Longrightarrow$ **Forme intégrale de la conservation du flux magnétique.**

Le flux du champ magnétique $\vec{B}$ à travers la surface fermée (S) quelconque est nul

<u>Conclusion :</u> Le flux du champ magnétique est conservatif.

<u>Conséquence :</u>

- Le flux du champ magnétique $\vec{B}$ à travers une surface ouverte quelconque ne dépend que de contour (Γ) sur lequel s'appuie cette surface.
- Les lignes de $\vec{B}$ sont toujours des courbes fermées (éventuellement 'fermées à l'infini').

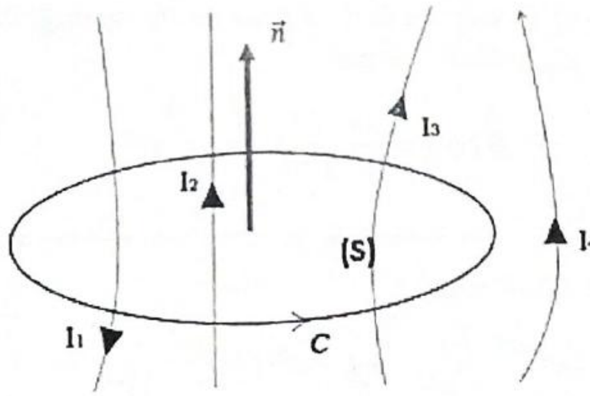
III. Circulation du champ magnétique : Théorème d'Ampère.

III.1. Forme intégrale du théorème d'Ampère

- **Cas d'une distribution filiforme de courant**

Soit $\vec{B}$ le champ magnétique crée par un système de courant stationnaire I_1, I_2, I_3...

Considérons un contour fermée et orienté (C) quelconque enlaçant certain de ces courants (I_1, I_2, I_3 par exemple). Soit (S) une surface s'appuyant sur le contour (C). Le sens de la normale $\vec{n}$ à la surface (S) est donné, en fonction du sens de parcours choisi sur le contour (C), par la règle de la main droite.



<u>Enoncé du théorème d'Ampère</u>

La circulation $\vec{B}$ de le long du contour (C), appelé contour d'Ampère, est égale à μ_0 fois la somme algébrique des courants enlacés par C :

$$\oint_{(C)} \vec{B}\vec{dl} = \mu_0 \sum_k \pm I_{k\ enlacé\ par\ C}$$

$\vec{dl}$: élément de longueur du contour (C) orienté dans le sens que celui de (C).

Pour déterminer le signe de I_k, on écrit :

$+I_k$ si le courant I_k est orienté dans le sens de la normale $\vec{n}$ à la surface (S).

$-I_k$ si le courant I_k est dans le sens contraire de la normale $\vec{n}$.

Dans l'exemple de la figure, on a : $\oint_{(C)} \vec{B}\vec{dl} = \mu_0 \sum_k \pm I_{k\ enlacé\ par\ \Gamma} = \mu_0(I_2 - I_1 + I_3)$

Remarque

Le théorème d'Ampère est utile pour déterminer le champ magnétique dans des configurations qui possèdent des symétries, relativement simple, par exemple un fil rectiligne infini, un solénoïde infini, etc … On choisir la courbe (C) en fonction des lignes de champ.

- **Cas d'une distribution non filiforme de courant**

Soit $\vec{B}$ le champ magnétique crée par une distribution volumique de courant de vecteur densité $\vec{J}$. Considérons un contour fermée et orienté (C) quelconque enlaçant une partie de la distribution. Soit (S) une surface s'appuyant sur le contour (C) et $\vec{n}$ la normale à la surface (S). L'intensité totale qui s'écoule à travers la surface (S) limitée par (C) est : $I_S = \iint_S \vec{J}\vec{dS}$.

Le théorème d'Ampère, permet d'écrire : $\oint_{(C)} \vec{B}\vec{dl} = \mu_0 I_S$

Application

Déterminer le champ magnétique crée par un fil rectiligne infini en un point M situé à une distance r du fil.

III.2. Forme locale (ou différentielle) du théorème d'Ampère.

En appliquant le théorème de Stokes, l'intégrale curviligne peut être transformée en intégrale de surface :

$$\oint_{(C)} \vec{B}\vec{dl}(M') = \iint_{(S)} \overrightarrow{rot}\vec{B}(M)\vec{dS} \quad Or \quad \oint_{(C)} \vec{B}\vec{dl}(M) = \mu_0 \iint_{(S)} \vec{J}(M)\vec{dS}$$

Ce qui donne : $\overrightarrow{rot}\vec{B}(M) = \mu_0 \vec{J}(M) \Rightarrow$ Equation d'Ampère-Maxwell.

Cette relation dite équation de Maxwell-Ampère, constitue la forme **différentielle (ou locale) du théorème d'Ampère.**

L'équation intégrale et l'équation différentielle du théorème d'Ampère sont équivalentes, la première exprime des propriétés en un point M.

IV. Potentiel vecteur du champ magnétique

IV.1. Définition

Le fait que $div\vec{B}(M) = 0$ implique qu'on peut définir un champ de vecteurs $\vec{A}$ tel que :

$$\vec{B}(M) = \overrightarrow{rot}\vec{A}(M) \quad car \quad (div(\overrightarrow{rot}) = 0)$$

$\vec{A}$: est appelé potentiel vecteur du champ magnétique $\vec{B}$.

IV.2. Expression du potentiel vecteur

- **Cas d'une distribution non filiforme de courant** non filiforme

Le champ magnétique créé par un conducteur de volume V parcouru par une densité volumique de courant $\vec{J}$ en un point M est donné par :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{J} \wedge \vec{r}}{r^3} dV = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r}\right) \wedge \vec{J}\, dV$$

Par ailleurs, on utilise la relation:

$\overrightarrow{rot}(c.\vec{u}) = \overrightarrow{grad}c \wedge \vec{u} + c.\overrightarrow{rot}(\vec{u})$.

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\iiint_V \overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{J}}{r}\right)dV - \iiint_V \frac{1}{r}\overrightarrow{rot}(\vec{J})dV\right) = \overrightarrow{rot}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \left(\frac{\vec{J}}{r}\right)dV\right)$$

On a $\overrightarrow{rot}(\vec{J})$=0 car $\vec{J}$ indépendant des coordonnées (x, y, z) et $\vec{B}(M) = \overrightarrow{rot}\vec{A}$.

On en déduit l'expression du potentiel vecteur $\vec{A}$ au point M, généré par une densité de courant $\vec{J}(P)$ au point P:

$$\vec{A}(M) = \oiiint_V \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{J}(P)}{PM} d\tau$$

- **Cas d'une distribution filiforme de courant**

L'équivalence déjà utilisée dans ce cas : $\vec{J}d\tau = I\,\vec{dl}$, donne pour expression du potentiel vecteur crée au point M par un circuit filiforme fermé C parcouru par un courant stationnaire I :

$$\vec{A}(M) = \oint_C \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\vec{dl}(P)}{PM} d\tau$$

<u>Remarque</u>

Soit une surface S délimitée par un contour orienté (C), la Circulation du potentiel vecteur $\vec{A}$ le long d'un contour fermé est :

$$\phi_S = \iint_S \vec{B}.\vec{dS} = \iint_S \overrightarrow{rot}(\vec{A}).\vec{dS}$$

Par application du théorème de Stokes et de la relation précédente, on a :

$$\phi_S = \iint_S \underbrace{\overrightarrow{rot}(\vec{A})}_{B}.\vec{dS} = \oint_C \vec{A}.\vec{dl}$$

<u>Conclusion</u>

Le flux du champ magnétique $\vec{B}$ à travers une surface quelconque S s'appuyant sur un contour fermé C est égale à la circulation du potentiel vecteur $\vec{A}$ le long du contour C.

IV.3. Jauge de Coulomb

La relation $\vec{B}(M) = \overrightarrow{rot}\vec{A}$ ne définit pas le champ de vecteur $\vec{A}$ d'une manière unique (il y a une infinité de solutions).

En effet, si en prend le vecteur :

$\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{grad}(f)$ ou f est une fonction scalaire arbitraire de M,

On a alors : $\overrightarrow{rot}(\vec{A}') = \overrightarrow{rot}(\vec{A} + \overrightarrow{grad}(f)) = \overrightarrow{rot}(\vec{A}) + \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}(f))$

Puisque : $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}(f)\right) = 0$ Alors : $\overrightarrow{rot}(\vec{A}') = \overrightarrow{rot}(\vec{A})$

Le potentiel vecteur $\vec{A}$ est alors défini au gradient d'une fonction scalaire près.

Pour faire le choix d'un potentiel vecteur, on ajoute une condition supplémentaire, appelée condition de jauge. En magnétostatique, l'usage est de choisir la jauge de coulomb, qui s'écrire :

$$div\vec{A} = 0 \ \ jauge\ de\ Coulomb$$

IV.4. Equation de Poisson pour la magnétostatique

En combinant les relations :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B}(M) = \mu_0\vec{J}(M) \ \ et \ \ \vec{B}(M) = \overrightarrow{rot}\vec{A}$$

Il vient : $\overrightarrow{rotrot}\vec{A} = \mu_0\vec{J}(M)$ soit $\overrightarrow{grad}div(\vec{A}) - \Delta A = \mu_0\vec{J}$

En appliquant la jauge de coulomb $div\vec{A} = 0$, on obtient :

$$\Delta A = -\mu_0\vec{J}$$

Cette relation est **l'équation de poisson** pour la magnétostatique, relient $\vec{A}$ au vecteur densité de courant $\vec{J}$ qui le produit.

Résumé

Pour déterminer l'expression du champ magnétique créé par quelques distributions classiques de courants, en effectuant les étapes suivantes :

1- **Étude des invariances** : Cela permet de choisir le système de coordonnées adapté au problème : cartésiennes ou cylindriques en cas d'invariance par translation et cylindriques ou sphériques en cas d'invariance par rotation. Les invariances fournissent également les variables dont dépend le champ.

2- **Analyse des symétries** : La connaissance des plans de symétrie et d'antisymétrie permet de déterminer l'orientation du champ magnétique en un point M : le champ magnétique appartient aux plans d'antisymétrie et est perpendiculaire aux plans de symétrie de distribution de courants. M appartient au plan de symétrie ou d'antisymétrie.

3- **Choix la méthode pour calcul le champ** magnétique parmi les deux exposées dans la suite.

a) Utilisation de la loi de Biot et Savart

Etape 1: Utilisation des symétries et des invariances pour déterminer la direction, le sens de $\vec{B}(M)$ et les variables dont il dépend.

Etape 2: Exprimer le champ élémentaire $d\vec{B}$ produit en M par un élément de courant $I\,d\vec{l}$.

Etape 3: Sommation (intégration) pour avoir le champ total $\vec{B}(M)$.

b) Utilisation du théorème d'Ampère

Le théorème d'Ampère joue un rôle analogue pour le champ magnétique à celui que joue le théorème de Gauss pour le champ électrostatique.

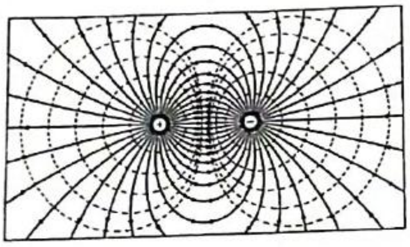
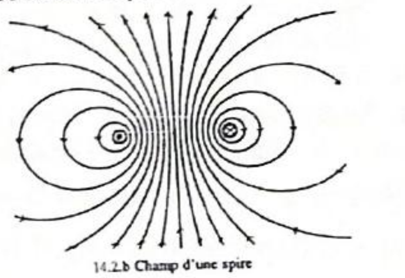
Etape 1: Détermination des symétries et des invariances.

Etape 2: Détermination du contour d'Ampère :

Celui-ci est défini de manière à rendre simple le calcul de la circulation. On choisira un contour composé de parties soit tangentes au champ le long desquelles la norme de B est uniforme, soit perpendiculaires au champ. Dans le premier cas, la circulation le long de cette partie du contour ne fait pas intervenir d'angle (les deux vecteurs sont colinéaires) et le calcul de la circulation sera très simple puisque la norme du champ est uniforme sur cette partie du contour. Dans le second, la circulation est nulle : le vecteur déplacement élémentaire et le champ magnétique sont perpendiculaires, leur produit scalaire est nul. Il est d'autre part nécessaire de bien tenir compte du fait suivant : le contour d'Ampère (comme c'était le cas pour la surface de Gauss) doit passer par le point où on cherche à calculer le champ.

Etape 3: Calcul par l'application du théorème d'Ampère.

Comparaison entre champ électrostatique et champ magnétostatique

ELECTROSTATIQUE	MAGNETOSTATIQUE
DEFINITION DU CHAMP A PARTIR D'UNE LOI DE FORCE	
$\vec{F} = q\vec{E}$	$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$
La charge q étant un scalaire, la force et la vitesse des vecteurs dont les sens ont une signification physique intrinsèque, ou « vrais vecteurs », la première relation définit $\vec{E}$ comme un **« vrai vecteur»**. La seconde contenant en revanche un produit vectoriel dont le sens est lié à une convention d'orientation de l'espace, définit $\vec{B}$ comme un **« pseudovecteur »**.	
CIRCULATION ET FLUX	
1) Grandeurs intégrales conservatives	
Le champ électrostatique est à circulation conservative $\oint \vec{E}.\vec{d\ell} = 0$ (équation globale, **vrai en régime permanent)** $\int_1^2 \vec{E}.\vec{d\ell} = -(V_2 - V_1)$ $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$ **(équation locale équivalente, vrai en régime permanent)**	Le champ magnétique est à flux conservatif $\oiint \vec{B}.\vec{dS} = 0$ **(équation globale, toujours vrai)** $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\,\vec{A}$
2) Lien entre le champ et sa source	
Théorème de Gauss $\oiint \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ (équation globale, **toujours vrai)**	Théorème d'Ampère $\oint \vec{B}.\vec{d\ell} = \mu_0 \sum_k I_{k\ enlacés}$ (équation globale, **vrai en régime permanent)**
TOPOGRAPHIE GLOBALE DU CHAMP	
Le champ électrostatique $\vec{E}$ diverge à partir des charges positives et converge vers les charges négatives  Fig. 10.4 – Champ d'un doublet électrique	Le champ magnétique $\vec{B}$ tourbillonne autour des courants qui sont ses sources  14.2.b Champ d'une spire
CALCUL DU CHAMP A PARTIR DE LA SOURCE	
Loi de Coulomb $\vec{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} dq \frac{\vec{u}}{r^2}$ avec $dq = \rho\, d\tau$ ou $\sigma\, dS$ ou $\lambda\, d\ell$	Loi de Biot et Savart $\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{dC} \wedge \vec{u}}{r^2}$ avec $\vec{dC} = I\, d\#$
PROPRIETES DE SYMETRIES	
1) Invariances	
Vis-à-vis des translations et des rotations, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ont les mêmes propriétés d'invariance que les distributions qui sont leurs sources.	
Une distribution de charges symétrique par rapport à un plan π a son champ $\vec{E}$ également symétrique par rapport à π.	Pour une distribution de courants invariante dans la symétrie par rapport à un plan ! , la symétrie par rapport à ! change $\vec{B}$ en l'opposé de son symétrique par rapport à π.
2) Champ en un point d'un plan de symétrie	
En un point P appartenant à un plan π qui est un plan de symétrie d'une distribution de charge, $\vec{E}(M)$ **appartient** à π.	En un point P appartenant à un plan ! qui est un plan de symétrie d'une distribution de courants, $\vec{B}(M)$ est **orthogonal** à ! .
3) Champ en un point d'un plan d'antisymétrie	
En un point P appartenant à un plan π^* qui est un plan d'antisymétrie d'une distribution de charge, $\vec{E}(M)$ est **orthogonal** à π^*.	En un point P appartenant à un plan π^* qui est un plan d'antisymétrie d'une distribution de courant, $\vec{B}(M)$ **appartient** à π^*.

	Nature du champ	Loi locale	Loi intégral
Électrique	flux	Équation de Maxwell-Gauss : $\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	Théorème de Gauss : $\oint_\Sigma \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \frac{\rho(P)}{\varepsilon_0}\,\mathrm{d}\tau = \frac{Q_{\text{int à } \Sigma}}{\varepsilon_0}$
	circulation	Le rotationnel du champ électrique permanent est nul : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$ partout	La circulation du champ électrique permanent est conservative : $\oint_\Gamma \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$ quel que soit Γ
Magnétique	flux	Équation du flux magnétique : $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ partout	Le champ magnétique a un flux conservatif : $\oint_\Sigma \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$ quelle que soit Σ fermée
	circulation	Équation de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$. *<u>Remarque</u> : Dans l'A.R.Q.P., en l'absence d'accumulation de charge :* $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ et $\mathrm{div}\,\vec{j} = 0$	Théorème d'Ampère : $\oint_\Gamma \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_\Sigma \mu_0 \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$

	Lien avec le champ		Équation locale
	local	intégral	
Potentiel scalaire	• Un champ de rotationnel nul est un champ de gradient : $\mathrm{rot}\,\vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$ • *Choix de jauge* Le potentiel scalaire est défini à une constante près.	• La circulation du champ électrique permanent sur une courbe reliant deux points, définit la différence de potentiel scalaire entre ces points : $V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$	• Le potentiel scalaire V vérifie l'équation de Poisson : $\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$.
Potentiel vecteur	• Un champ de divergence nulle est un champ de rotationnel : $\mathrm{div}\,\vec{A} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$. • *choix de jauge* Le potentiel vecteur est défini à un gradient près.	• La circulation du potentiel vecteur sur un contour est égale au flux du champ magnétique à travers toute surface orientée s'appuyant sur ce contour : $\oint_\Gamma \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_\Sigma \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$.	